Mõningaid lahendusi, teised analoogsed.

Lahendada rekurrentne võrrand
$A_{n+2} = -3A_{n+1} + 10A_n + 3$, $A_0 = 1$, $A_1 = 3$

1. Antud rekurrentse võrrandi karakteristlikuks võrrandiks on $x^2 + 3x - 10 = 0$.
Selle juured on $x_1 = -5$ ja $x_2 = 2$. (Tee kontroll).
Seega otsime üldlahendit kujul $A_n = C_1 \cdot (-5)^n + C_2 \cdot (2)^n + D$.
2. Leiame erilahendi D.
Kuna rekurrentse võrrandi täiendav liidetav on konstant (3), siis otsime ka erilahendit konstandi kujul.
Asendades selle võrrandisse, saame

$$D = -3D + 10D + 3$$
$$-6D = 3$$
$$D = -0{,}5$$

3. Leiame kordajad C_1 ja C_2, kasutades A_0 ja A_1 väärtusi.
$A_0 = 1 = C_1 \cdot (-5)^0 + C_2 \cdot (2)^0 - 0{,}5$,
$A_1 = 3 = C_1 \cdot (-5)^1 + C_2 \cdot (2)^1 - 0{,}5$, seega saame süsteemi

$$C_1 + C_2 = 1{,}5$$
$$-5C_1 + 2C_2 = 3{,}5$$

Siit $C_1 = -1/14$ ja $C_2 = 11/7$. (Tee kontroll).
Seega on võrrandi üldlahendiks

$$A_n = -1/14 \cdot (-5)^n + 11/7 \cdot (2)^n - 0{,}5.$$

(Tee kontroll. Arvuta nt. A_2 välja kahel viisil, esialgsest võrrandist ja üldlahendist.)

Lahendada rekurrentne võrrand
$A_{n+2} - 5A_{n+1} - 14A_n + 36n = 66$, $A_0 = 4$, $A_1 = 21$

1. Antud rekurrentse võrrandi karakteristlikuks võrrandiks on $x^2 - 5x - 14 = 0$.
Selle juured on $x_1 = 7$ ja $x_2 = -2$. (Tee kontroll).
Seega otsime üldlahendit kujul $A_n = C_1 \cdot (7)^n + C_2 \cdot (-2)^n + D$.
2. Leiame erilahendi D.
Kuna rekurrentse võrrandi täiendav liidetav on kujul $-36n+66$, siis otsime erilahendit kujul $D = An + B$.
Pannes erilahendi võrrandisse, saame

$$(An + B) - 5 \cdot (A(n-1) + B)) - 14 \cdot (A(n-2)+B)) + 36n = 66.$$

Teisendades saame

$$[An - 5An - 14An + 36n] + [B + 5A - 5B + 28A - 14B] - 66 = 0.$$

Siit esiteks

$$n(A - 5A - 14A + 36) = 0$$
$$18A = 36$$
$$A = 2$$

Ja teiseks

$B + 5A - 5B + 28A - 14B - 66 = 0$, asendame A ja arvutame, saame

$$18B = 10 + 56 - 66 = 0$$
$$B = 0$$

Seega erilahendiks on $2n$. (Tee kontroll).
3. Leiame kordajad C_1 ja C_2, kasutades A_0 ja A_1 väärtusi.

$A_0 = 4 = C_1 \cdot (7)^0 + C_2 \cdot (-2)^0 + 2 \cdot 0,$
$A_1 = 21 = C_1 \cdot (7)^1 + C_2 \cdot (-2)^1 + 2 \cdot 1$, seega saame süsteemi

$$C_1 + C_2 = 4$$
$$7C_1 - 2C_2 = 19$$

Siit $C_1 = 3$ ja $C_2 = 1$. (Tee kontroll).
Seega on võrrandi üldlahendiks

$$A_n = 3 \cdot (7)^n + (-2)^n + 2n.$$

(Tee kontroll. Arvuta nt. A_2 välja kahel viisil, esialgsest võrrandist ja üldlahendist.)

Kuus lauljat peavad konkursil esitama kaks kümnest etteantud laulust. Kui suur on tõenäosus, et täpselt kolm neist valivad täpselt samad kaks laulu (ülejäänutel on kõigil erinevad)?

Erinevaid võimalusi valida 10 laulu hulgast 2 on kombinatsioonide arv 10-st 2 kaupa, ehk siis 10*9/2 = 45. (Laulupaaride valik iga laulja jaoks).
Erinevaid võimalusi, kes on need kolm lauljat kuue hulgast, kes laulavad sama laulude paari, on kombinatsioonide arv 6-st 3 kaupa, ehk siis 6*5*4/6 = 20.
Sisuliselt lauldakse siis 4 erinevat laulupaari, mille valimiseks on meil võimalusi 45*44*43*42.
Seega, sobivate võimaluste arv on 20*45*44*43*42 ja kõikide võimaluste arv on 45^6.
Vastuseks on nende suhe, mis on 0,008.

Valime 52 kaardi hulgast 4 kaarti. Kui suur on tõenäosus, et saame vähemalt 2 ristit? (4 masti, igas 13 kaarti).

Kõikide võimaluste arv valida välja 4 kaarti on kombinatsioonide arv 52-st 4 kaupa, 52*51*50*49/24 = 270725. (Kaartide saamise järjekord ei ole oluline).
Võimaluste arv, et saame 2 ristit ja kaks muud: valikute arv 13-st 2 kaupa ja valikute arv 39-st 2 kaupa, (13*12/2)*(39*38/2) = 57798
Võimaluste arv, et saame 3 ristit ja ühe muu: valikute arv 13-st 3 kaupa ja valikute arv 39-st 1 kaupa, (13*12*11/6)*(39) = 5577
Võimaluste arv, et saame 4 ristit: valikute arv 13-st 4 kaupa, (13*12*11*10/24) = 715
Kokku seega soodsate valikute arv: 57798 + 5577 + 715 = 64090
Vastuse annab meile suhe 64090/270725 = 0,237.

Viis sõpra sõidavad samal päeval bussiga Tartusse. Kui suur on tõenäosus, et täpselt kolm neist satuvad samale bussile, kui sobivaid bussiaegu on 12?

Ühe konkreetse bussi jaoks on tõenäosus, et sinna satub 3 sõpra, ja et kaks ülejäänud sõpra satuvad mingitele teistele bussidele, $(1/12)^3*(11/12)^2$. (Kui arvestame, et kaks ülejäänud sõpra satuvad erinevatele bussidele, siis $(1/12)^3*(11/12)*(10/12)$).
Erinevaid busse, millele võivad juhtuda kolm sõpra, on 12.
Valikute arv, millised kolm sõpra satuvad samale bussile, on kombinatsioonide arv 5-st 3 kaupa, ehk siis 10.
Kokkuvõttes on tõenäosus $12*10*11^2/12^5 = 0{,}058$.

Neli sõpra on ostnud juhuslikult pileti samale bussile. Kui suur on tõenäosus, et täpselt 2 tükki neist on saanud kõrvuti kohad (bussis on 20 istet, kõrvuti on 1 ja 2, 3 ja 4 jne.)

20 istet moodustavad 10 istmepaari.
Võimalusi, kes neljast kõrvuti istuvad, on kombinatsioonide arv 4-st 2 kaupa, ehk siis 6.
Võimalusi, millisel istmepaaril istuvad need kaks sõpra, on 10.
Oma istmetel võivad nad istuda kahel moel (A B või B A).
Ülejäänud kaks sõpra istuvad kumbki eraldi, seega on vastavalt valida neil 18 ja 16 koha vahel.
Kõikide erinevate võimaluste arv, kuidas neli inimest võivad bussis paikneda, on 20*19*18*17.
Kokkuvõttes same seega 6*10*2*18*16*/20*19*18*17 = 0,297.

Näidake, et $(x^3+3x^2+2x)(x^7- x)$ jagub 21-ga iga täisarvu x korral.

21 = 3*7. Kui tahame näidata, et arv jagub 21-ga, siis piisab, kui näitame, et see jagub nii 7 kui ka 3-ga. Kui p on mingi algarv, siis sellest, et $p|a$, järeldub, et $p|ab$ igasuguse täisarvu b korral, seega piisab, kui näitame, et nii 7 kui ka 3 jagavad arvu $(x^3+3x^2+2x)(x^7- x)$ mingit tegurit.
1. Väike Fermat'teoreem ütleb meile, et $7|x^7- x$.
2. $x^3+3x^2+2x = x(x+1)(x+2)$. Tegu on kolme järjestikuse täisarvuga. Seega teame, et 3 jagab kindlasti vähemalt ühte neist (iga kolmas arv jagub 3-ga). Järelikult jagab 3 ka korrutist $x(x+1)(x+2)$.
Kokkuvõttes seega oleme näidanud, et nii 3 kui 7 jagavad arvu $(x^3+3x^2+2x)(x^7- x)$ ja seega $21|(x^3+3x^2+2x)(x^7- x)$.