3 Predikaatarvutus
3.1 Formaliseerimine predikaatarvutuse keeles

Predikaat väljendab *objekti omadust* või mingit *seost* (relatsiooni) objektide vahel.

Näited:

"x on Juku isa"
"Juku armastab Mari"
"Mari on kena"

Selgitus:
- "Juku", "Mari", – predikaadi argumendid (objektid), tähistatakse *indiviidkonstandiga*
- "_ on _ isa" ja "_ armastab _" – kahekohalised *predikaadid* (*dyadic predicates*)
- "_ on kena" – ühekohaline predikaat (*monadic predicate*)

kus x – *indiviidmuutuja*

Mõisteid: - aarsus (*arity*) – predikaadi argumentide arv (0 - n)
- $A(x, y)$ või $A\ x\ y$ – prefiks kuju,
- $x\ A\ y$ – infiks kuju,
- $(x,y)A$ või $x\ y\ A$ -postfiks kuju

!!! *Esimest järku* predikaatarvutuses:

- predikaatkonstandid -- puuduvad predikaatmuutujad st. kui predikaat on defineeritud, siis arutluse käigus tema tähendus ei muutu,
- üks predikaat ei tohi olla teise predikaadi argumendiks,

- Liitlausete formaliseerimine:
  - *Atomaarne lause* e. *aatom* – sisaldab vaid ühte predikaati

    Näide1:
    Peeter on Juku isa: *isa*(Peeter, Juku) ehk *I*(P, J)

    Näide 2:
    Peeter on kellegi isa: *isa*(Peeter, *x*)

  - *Liitlause* – moodustatakse aatomitest lausearvutuse tehete abil

    Näide:
    Peeter on Juku isa ja Jaani poeg: *isa*(Peeter, Juku) $\wedge$ *isa*(Jaan, Peeter)

- **Kvantorid**
  Üldistuse ja abstraktsiooni väljendamiseks
  Predikaatarvutuse arutlus kehtib mingi valdkonna objektide kohta
  Valdkonna objektide hulka kokku nimetatakse *universumiks*.

- **Üldisuskvantor** (*universal quantifier*) - universumi *kõikide objektide* kohta käiva väite esitamiseks.

$\forall x\, A(j, x)$ - "iga objekt x on objektiga j seoses A". Näiteks. "Juku armastab kõiki"

- **Eksistentsikvantor** (*existential quantifier*) - mingit tingimust rahuldava objekti olemasolu väljendamiseks:

$\exists x\, A(j, x)$ - "Leidub vähemalt üks objekt x, millega objekt j on seoses A.
N. "Juku armastab kedagi"

$\exists! x\, A(j, x)$ - "Leidub täpselt üks objekt x, millega objekt j on seoses A"

Muutuja on *valemis seotud*, kui ta esineb koos kvantoriga ja avaldises kvantori mõjupiirkonnas ja vastasel juhul on muutuja *valemis vaba*.

Muutuja väärtustamisel saadavat lauset nim. *väärtustatuks* ja väärtustamata lause *eksemplariks*.

3.2 Predikaatloogika süntaks ja semantika

- **Tähestik**
  - Predikaatsümbolid: *A*, *B*, *C*, ... (suurtähed)
  - Indiviidmuutujad: *x*, *y*, *z*, ... (tähestiku viimased tähed)
  - Indiviidkonstantide sümbolid: *a*, *b*, *c*, ... , *v*
  - Loogika tehete sümbolid: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\equiv$
  - Kirjavahemärgid: ()

  Indiviidtermid on indiviidkonstantide sümbolid ja indiviidmuutujad

- **Süntaks** (induktiivselt)
  Atomaarne valem e. aatom on kujul *L*, kus *L* on 0-kohaline predikaatsümbol e.lausemuutuja või kujul $P(t_1,..., t_n)$ (või $P\ t_1... t_n$), kus *P* on n-kohaline predikaatsümbol ja $t_1... t_n$ on indiviidtermid.

1. *Atomaarne valem* on valem
2. Kui *p* on valem, siis $\neg p$ on valem.
3. Kui *p* ja *q* on valemid, siis $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \equiv q$ on valemid.
4. Kui *p* on valem ja *v* on indiviidmuutuja, siis $\forall v\ p$ ja $\exists v\ p$ on valemid.

5. Muid valemeid PA-s ei ole
Muutuja on *valemis seotud*, kui **kõik** tema **esinemised** selles valemis on seotud.
Vastasel juhul on muutuja *valemis vaba*.

Valem on *kinnine* (*closed*), kui kõik tema muutujad on seotud ja vastasel juhul on *valem vaba*.

Näide: x on valemis $A\,j\,x \wedge \forall\, x\, A\,x\,x$ vaba ning see valem on lahtine.

Lauseks nimetatakse predikaatarvutuse valemit, milles ei ole vabu muutujaid:
Näide: $\exists\, x\, (A\,j\,x \wedge \forall\, y\, A\,y\,y)$

- **Semantika esitus *a´ la* Tarski**

! PA lause tõesuse kontrollimiseks on vaja vaadata läbi kõik tema tähendused.
!! Tähendused sõltuvad ka seotud muutujate väärtustustest →
Selleks tõeväärtuse tabelid ei sobi, vaja ***kompaktsemat esitust*** tõeväärtuse arvutamiseks.

PA signatuur sisaldab antud arvutuse kõiki predikaat- ja konstantsümboleid.
PA loogika sümbolid – loogikatehte sümbolid ja indiviidmuutujad.

Olgu *Const* – PA indiviidkonstantide sümbolite loend ja *Pred* predikaatsümbolite loend, siis signatuur σ on nende loendite *Const* ja *Pred* paar:

$$\sigma = \langle \, Const \, ; Pred \, \rangle$$

Näide:
Olgu $Const = \langle \, j, m \rangle$, kus (j – Juku, m – Mari)
$Pred = \langle N \, \rangle$ (N – “_ on naine”)
siis
signatuur e. tähistuste hulk: $\sigma = \langle \{j, m\}; \{N \, \}\rangle$

Universum U – kõigi objektide hulk, mida PA termid võivad tähistada
PA interpretatsiooniks I nimetatakse loendit, mis koosneb *universumist* e. *interpretatsiooni kandjast* (so hulgast U_I, $U_I \neq \varnothing$) ja *PA* signatuuri σ kõigi elementide interpretatsioonidest universumis U_I.

$$I = \langle\, U_I;\ Const_I;\ Pred_I \,\rangle, \text{ kus}$$

- $Const_I$ on saadud loendist *Const* iga konstantsümboli *c* asendamisel universumi U_I mingi elemendiga c_I .
- $Pred_I$ on saadud loendist *Pred* iga predikaatsümboli *P* asendamisel tema ekstensiooni e. tõehulgaga P_I universumis U_I.

<u>Näide (järg)</u>:

Olgu universum H = {Juku, Mari}, siis PA signatuuriga σ interpretatsioon

$I = \langle\, H;\ \{j_I, m_I\};\{\ N_I\}\,\rangle$, kus

j_I = Juku
m_I = Mari
N_I = {Mari} $\subseteq H$ *% predikaat „on naissoost“*

Ülesanne 1: Defineerige PA (süntaks ja semantika), milles on 2 ühekohalist ja 1 kahekohaline predikaat ning universum koosneb viiest objektist.

- **Lause** on PA valem, milles puuduvad vabad muutujad st. tema interpretatsioon antud universumis on tõene või väär!

Tähistusi:

$I \models p$ - valem p on interpretatsioonis I tõene

Valemite hulga L *mudeliks* nimetame interpretatsiooni I, milles kõik L laused on tõesed:

$$I \models p \quad (p \in L)$$

Näide (järg):

Interpretatsioon I on lause N mudel.

Märkus:

Olgu $p(x/c)$ valem, mis on saadud valemist p mutuja x kõigi vabade esinemiste asendamisel sümboliga c. Kui x on valemi p ainus vaba muutuja ja c universumi mingile elemendile vastav konstantsümbol, siis on $p(x/c)$ predikaatarvutuse kinnine valem e. lause.

Definitsioon (*PA semantika*). Olgu antud interpretatsioon I , mille universum on U_I.

1. Kinnine atomaarne valem $P\ t_1 \dots t_n$ on interpretatsioonis I tõene parajasti siis, kui konstantide korteež $(t_{1I}, \dots, t_{nI})$ kuulub predikaadi P ekstensiooni:

$$I \models P\ t_1 \dots t_n \quad \Leftrightarrow \quad (t_{1I}, \dots, t_{nI}) \in P_I.$$

2. $I \models \neg p \quad \Leftrightarrow \quad I \not\models p$

3. $I \models p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad I \models p$ ja $I \models q$

   $I \models p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad I \models p$ või $I \models q$

   $I \models p \Rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad I \not\models p$ või $I \models q$

   $I \models p \equiv q \quad \Leftrightarrow \quad I \models p$ ja $I \models q$ või $I \not\models p$ ja $I \not\models q$

4. $I \models \forall x\ p \quad \Leftrightarrow \quad$ *iga* $c \in U_I$ korral $I \models p\{x/c\}$
5. $I \models \exists x\ p \quad \Leftrightarrow \quad$ *leidub* $c \in U_I$, nii et $I \models p\{x/c\}$

Valem p on PA-s *loogiliselt tõene*, kui ta on tõene igas interpretatsioonis: $\models \; p$

Valem p on PA-s *loogiliselt väär*, kui ta on väär igas interpretatsioonis: $\models \; \neg p$

Kõik ülejäänud valemid on *kontingentsed*.

Kehtestatavad valemid on loogiliselt tõesed ja kontingentsed.

Lause: $\models p \quad \Leftrightarrow$ iga interpretatsiooni I korral kehtib $I \models \; p$

Mitte segamini ajada loogilise järelduvuse mõistega!!!

- **Valemite hulgast *Γ järeldub loogiliselt* valem *p*, kui iga *Γ* mudel on ka *p* mudel.**

$$\Gamma \vdash p$$

PA-s formaliseerimise mustreid:

- Loogiline ruut

Uurime ühe kvantoriga (ja filtreerimispredikaadiga) lausete omadusi:

- Üldjaatav lause (A - väljendab omaduse olemasolu kõigil antud liiki objektidel):
  Näide: ”*Kõik inimesed naeratavad*”

$$\forall x(I\, x \Rightarrow N\, x)$$

- Üldeitav lause (E):
  Näide: ” *Ükski inimene ei naerata*”

$$\forall x(I\, x \Rightarrow \neg N\, x)$$

- Osajaatav lause (I - omadus esineb ainult osadel antud liiki objektidel):
  Näide: ” *Mõni inimene naeratab*”

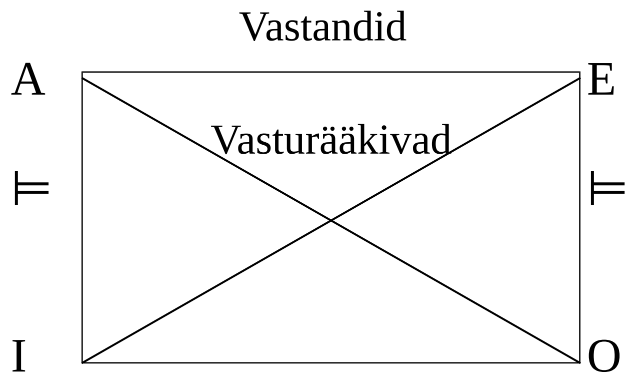
$$\exists x(I\, x \wedge N\, x)$$

- Osaeitav lause (O):
  Näide: ” *Mõni inimene ei naerata*”

$$\exists x(\, I\,x \wedge \neg\, N\,x)$$

- *Vastandid* - laused, mis ei saa olla korraga tõesed
- *Vasturääkivus e. kontradiktsioon* – laused, mille tõeväärtused on alati erinevad

<u>Lause:</u> Valemid p ja q on *vastandid* parajasti siis, kui $p \models \neg q$ ja $q \models \neg p$.
Valemid p ja q on *vasturääkivad* parajasti siis, kui $p = \neg q$



$A = \neg O$ $\qquad\qquad$ $A \models I$
$O = \neg A$ $\qquad\qquad$ $E \models O$
$I = \neg E$

$E = \neg I$

- <u>Süllogismid</u>

  - Süllogism on kahe eeldusega kehtivad arutlused.
  - Eeldustes on 3 mõistet, kusjuures üks esineb mõlemas eelduses

  Süllogismi figuurid:

Kõik kassid on hallid	$\forall x\ (K\ x \Rightarrow H\ x)$
<u>*Mõni koduloom on kass*</u>	$\underline{\exists\ x\ (L\ x\ \wedge\ K\ x)}$
Mõni koduloom on hall	$\exists\ x\ (L\ x\ \wedge\ H\ x)$

- Kvantorite korduv kasutamine

Samanimeliste kvantorite järjekorra vahetamine on lubatud:

Keegi armastab kedagi: $\exists x\ \exists y\ A\ x\ y$

Kedagi armastatakse: $\exists y\ \exists x\ A\ x\ y$

$$\exists x\, \exists y\, A\, x\, y = \exists y\, \exists x\, A\, x\, y$$
$$\forall x\, \forall y\;\; p = \forall y\, \forall x\;\; p$$

- Erinevat tüüpi kvantorite kohti ei saa vabalt vahetada!!!

  $E\,xy$ – ”x ema on y”

  $\forall x\, \exists y\, E\, xy \neq \exists y\, \forall x\, E\, xy$ % Igal inimesel leidub ema

$$\exists y\, \forall x\, p \models \forall x\, \exists y\, p$$