10. Algebra predikaatide rakendamine loogika valemite interpreteerimisel
10.1 Võtteid tööks termidega.

- Alamtermi leidmine:

Term *S* on termi *T alamterm*, kui ta on identne termiga *T* või termis *T* sisalduva termiga. Näiteks ‘s + d’ on termi ‘k – (s + d)’ alamterm.

Näide (alamtermi leidmine)

```
subterm(T, T).                    % Termid on prefiks-kujul
subterm(S, T):-
        T =..[_|Args], sub(S, Args).

sub(S, [First|Rest]):-
        subterm(S, First); sub(S,Rest).
```

Päring:

```
?- subterm(+(s,d),(-k,+(s,d))).
```

10.2. Loogikaavaldiste interpreteerimine hulgaoperatsioonide abil

Defineerime hulgaoperatsioonid operaatorkujul:

```
    :-op(500,  fx, [~]).         % täiend
    :-op(501, xfx, [/\]).        % ühisosa
    :-op(502, xfx, [\/]).        % ühend

    value(~A,C):-                % Olgu A hulgateoreetiline avaldis
       value(A,B),               % Leida avaldise A ekstensioon B
       universal_set(U),
       complement(U,B,C).
    value(A\/B,C):-
       value(A,U),
       value(B,V),
       union(U,V,C).
    value(A/\B,C):-
       value(A,U),
       value(B,V),
       intersection(U,V,C).
    value(A,A):-     set(A).     % kas A väärtuseks on hulk?
```

```
set([]).                              % tüübi kontroll
set([_|S]):- set(S).

universal_set([a,b,c,d]).             % universaalne hulk (universumi
                                      % objektid)- sõltub rakendusest
complement([],_,[]).                  % hulga täiend tühihulgani on[]
complement([H|T], X,Y):-              % tail-recursion
    complement(T,X,Z),!,
    ((member(H,X),Y=Z);Y=[H|Z]).

union([], Y,Y).
union([H,X],Y,Z):-
    member(H,Y),!,
    union(X,Y,Z).                     % tail-recursion
union([H|X],Y,[H,Z]):-
    union(X,Y,Z).
```

Päring:

```
?- X=[a,b], Y=[b,c], value(~((X/\~Y)\/(Y/\~X)),Z).
Z=[b,d]
```

10.3. **Lausearvutuse valemite interpreteerimine**

Näide: tõestada valem $c \wedge (a \vee b) \rightarrow c \wedge a$, kus *a*,*b*,*c* on lausemuutujad

Päring Prologis: `[c/\(a\/b)]?c/\a.`

Interpreteeriv programm eeldab valemite esitust operaatorkujul:

```
:- op(510, fx,  [~]).              % eitus - "¬"
:- op(520, xfy, [/\]).             % konjunktsioon
:- op(530, xfy, [\/]).             % disjunktsioon
:- op(540, xfx, [->]).             % implikatsioon
:- op(550, xfx, [?]).              % järelduvus "⊦"
```

```
Assumptions?Goal:-                          % Vastuväiteline tõestusskeem:
    transform(Assumptions, Goal, Formula), % teisendus KNK-le
    setup(Formula, Valuation),                 % lausemuutjate leidm.
    (generate(Valuation),                 %lausemuutujate väärtustamine
        value(Formula,t,Valuation), %valemi tõeväärtuse arvut. ja
        write('not valid'))               %unifitseerimine väärtusega t
    ;
    write('valid').                       % Kui valemi eitus alati väär
```

```
transform([],G,~G).          % valemite listi teisendamine KNK-le
transform([H|T],G,H/\X):-    % kus tõestatav valem on eituse all.
   transform(T,G,X).         % sabarekursioon

setup(A,[[A|_]]):- atomic(A). % lausemuutujate väljaselgitamine
setup(~F,V):-  setup(F,V).    % eitusega valemi muutujate leidm
setup(F,V):-                  % binaarse seose muutujate leidm.
   F=..[_,A,B],               % A, B on binaarseose alamvalemid
   setup(A,X),
   setup(B,Y),
   union(X,Y,V).    % V-paaride list, kus 1. el. on muutuja nimi
                                               2. element väärtustamata

% ======= Lausemuutujate tõeväärtuste genererereerimine ==========
   generate([]).             %
   generate([[A,V]|T]):-     % A - lausemuutuja, V -tõeväärtus
      generate(T) ,
      (V=t; V=f).         % lausemuutujate väärtus algselt 'true'
                          % tagasivõtu korral 'false'
% --------------------------------------------------------------
```

```
value(A,Z,V):-
    atomic(A),!,
    member([A,Z],V).          % alamvalemite tõev. arvutus
value(~A,Z,V):-
    value(A,X,V),
    truth_table(~X,Z).
value(A/\B,Z,V):-
    value(A,X,V),
    value(B,Y,V),
    truth_table(X/\Y,Z).
value(A\/B,Z,V):-
    value(A,X,V),
    value(B,Y,V),
    truth_table(X\/Y,Z).
value(A->B,Z,V):-
    value(A,X,V),
    value(B,Y,V),
    truth_table(X->Y,Z).
```

```
truth_table(t/\t, t):- !.
truth_table(_/\_, f).
truth_table(f\/f, f):- !.
truth_table(_\/_, t).
truth_table(t->f, f):- !.
truth_table(_->_, t).
truth_table(~t, f).
truth_table(_, t).
```

Temporaalloogika valemite interpreteerimine

Temporaalloogika CTL* semantika (Kripke struktuuril)

Kripke struktuur $M = \langle S, R, L\rangle$ - struktuur, kus S – lõplik olekute hulk

$R \subseteq S \times S$ – kõikjal määratud (vahetu-) saavutatavuse relatsioon;

$L: S \rightarrow 2^{AP}$ - märgistus (märgistab iga oleku selles olekus kehtivate atomaarvalemitega).

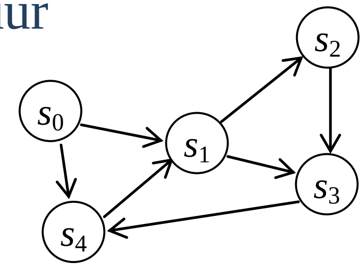
Tee struktuuril M on lõpmatu olekute jada $\pi = s_0, s_1, \ldots,$ kus $\forall i \geq 0, (s_i, s_{i+1}) \in R$;

π^i - π *sufiks*, mis algab tee i-nda olekuga s_i ;

$M, s \models f$ - valem f kehtib Kripke struktuuri M olekus s;

$M, \pi \models f$ - valem f kehtib Kripke struktuuri M teel π .

Näide: Kripke struktuur



$S = \{ s_0, \ldots , s_4\}$

$R = \{\langle s_0, s_1\rangle, \langle s_0, s_4\rangle, \langle s_1, s_2\rangle, \ldots, \langle s_4, s_1\rangle\}$

$L = \{s_0 \rightarrow \{x > 3, y = z, f(z) - x > 0\},$

$\ldots,$

$s_4 \rightarrow \{x = 2, y > z, f(z) < x\} \}$

CTL valemite interpretatsioon

Olgu *p* atomaarvalem.

1. $M, s \models p \quad \Leftrightarrow \quad p \in L(s)$
2. $M, s \models \neg f \quad \Leftrightarrow \quad M,s \not\models f$
3. $M, s \models f_1 \vee f_2 \quad \Leftrightarrow \quad M,s \models f_1$ *või* $M,s \models f_2$
4. $M, s \models f_1 \wedge f_2 \quad \Leftrightarrow \quad M,s \models f_1$ *ja* $M,s \models f_2$
5. $M, s \models \mathbf{E}\, g \quad \Leftrightarrow$ *olekust s leidub tee* π, *nii et* $M,\pi \models g$
6. $M, s \models \mathbf{A}\, g \quad \Leftrightarrow$ *mistahes tee* π *korral olekust s* $M,\pi \models g$
7. $M,\pi \models f \quad \Leftrightarrow$ *s on tee* π *esimene olek ja* $M,s \models f$
8. $M,\pi \models \neg g \quad \Leftrightarrow \quad M,\pi \not\models g$
9. $M,\pi \models g_1 \vee g_2 \quad \Leftrightarrow \quad M,\pi \models g_1$ *või* $M,\pi \models g_2$
10. $M,\pi \models g_1 \wedge g_2 \quad \Leftrightarrow \quad M,\pi \models g_1$ *ja* $M,\pi \models g_2$
11. $M,\pi \models \mathbf{X}\, g \quad \Leftrightarrow \quad M,\pi^1 \models g$
12. $M,\pi \models \mathbf{F}\, g \quad \Leftrightarrow$ *leidub* $k \geq 0$, *et* $M,\pi^k \models g$
13. $M,\pi \models \mathbf{G}\, g \quad \Leftrightarrow$ *iga* $i \geq 0$ *korral* $M,\pi^i \models g$
14. $M,\pi \models g_1\, \mathbf{U}\, g_2 \quad \Leftrightarrow$ *leidub* $k \geq 0$, *et* $M,\pi^k \models g_2$ *ja iga* $0 \leq j < k$ *korral* $M,\pi^j \models g_1$
15. $M,\pi \models g_1\, \mathbf{R}\, g_2 \quad \Leftrightarrow$ *iga* $j \geq 0$ *korral, kui iga* $i < j$ *korral* $M,\pi^i \not\models g_1$, *siis* $M,\pi^j \models g_2$

Samasused: $\vee$, $\neg$, **U**, **X** ja **E** kaudu saab väljendada kõiki teisi CTL* operaatoreid.

- $f \wedge g \equiv \neg(\neg f \vee \neg g)$
- $f\, \mathbf{R}\, g \equiv \neg(\neg f\, \mathbf{U}\, \neg g)$
- $\mathbf{F}\, f \equiv \mathit{true}\, \mathbf{U}\, f$
- $\mathbf{G}\, f \equiv \neg \mathbf{F}\, \neg f$
- $\mathbf{A}(f) \equiv \neg \mathbf{E}(\neg f)$

CTL ja LTL on CTL* alamloogikad.

CTL – hargneva ajaga loogika

LTL – lineaarse ajaga loogika

CTL: temporaalsed operaatorid **A** ja **E** on sisuliselt kvantorid antud olekust lähtuvate võimalike teede hulgal.

LTL: operaatorid kirjeldavad olekute hulki ühel teel.

CTL-s temporaalsed operaatorid **X**, **F**, **G**, **U** ja **R** võivad esineda tee kvantorite järel, st CTL* teevalemeid kitsendab reegel:

- Kui f ja g on olekuvalemid, siis $\mathbf{X}\,f$, $\mathbf{F}\,f$, $\mathbf{G}\,f$, $f\,\mathbf{U}\,g$, $f\,\mathbf{R}\,g$ on teevalemid.

LTL valemitel on kuju $\mathbf{A}\,f$, kus f on teevalem ja ainukesed lubatud olekuvalemid on atomaarsed valemid:

- Kui $p \in AP$, siis p on teevalem
- Kui f ja g on teevalemid, siis on teevalemid:
  - $\neg f$, $f \vee g$, $f \wedge g$, $\mathbf{X}\,f$, $\mathbf{F}\,f$, $\mathbf{G}\,f$, $f\,\mathbf{U}\,g$, $f\,\mathbf{R}\,g$

Loogikatel CTL*, CTL ja LTL on erinev väljendusvõimsus:

Näide:

- CTL-s puudub valem, mis oleks ekvivalentne LTL valemiga **A**(**FG** *p*) - ”igal teel leidub olek, millest alates kehtib alati valem *p*”.
- LTL-s puudub valem, mis oleks ekvivalentne CTL valemiga **AG**(**EF** *p*).
- Valem **A**(**FG** *p*) $\vee$ **AG**(**EF** *p*) on CTL* valem, mis ei ole väljentatav ei CTL-s ega LTL-s.

CTL operaatorid:

- **AX** ja **EX**
- **AF** ja **EF**
- **AG** ja **EG**
- **AU** ja **EU**
- **AR** ja **ER**

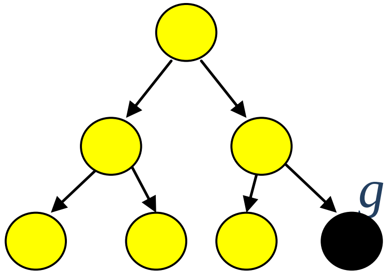
SAMASUSED

Kõik CTL operaatorid on väljendatavad **EX**, **EG** ja **EU** kaudu:

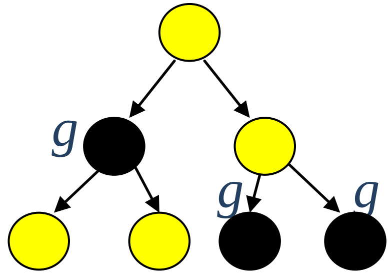
$$\mathbf{AX}\, f \equiv \neg\, \mathbf{EX}(\neg f)$$
$$\mathbf{EF}\, f \equiv \mathbf{E}[\mathit{true}\ \mathbf{U}\ f]$$
$$\mathbf{AG}\, f \equiv \neg\, \mathbf{EF}(\neg f)$$
$$\mathbf{AF}\, f \equiv \neg\, \mathbf{EG}(\neg f)$$
$$\mathbf{A}(f\ \mathbf{U}\ g) \equiv \neg\, \mathbf{E}[\neg g\ \mathbf{U}\ (\neg f \wedge \neg g)] \wedge \neg \mathbf{EG} \neg g$$
$$\mathbf{A}(f\ \mathbf{R}\ g) \equiv \neg\, \mathbf{E}[\neg f\ \mathbf{U}\ \neg g]$$
$$\mathbf{E}(f\ \mathbf{R}\ g) \equiv \neg\, \mathbf{A}[\neg f\ \mathbf{U}\ \neg g]$$

Modaalsused CTL-s:
A – “Kõikide teede korral”
E – “Mõne tee korral”
[] – “Kõikide olekute korral antud teel”
⟨⟩ - “Mõne oleku korral antud teel”

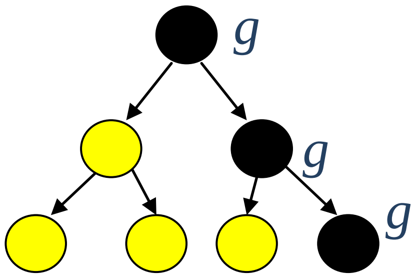
Vaatame CTL fragmenti, kus kõik TL valemid on kujul ®© φ, kus
® $\in$ {A, E} ja © $\in$ { [],⟨⟩}



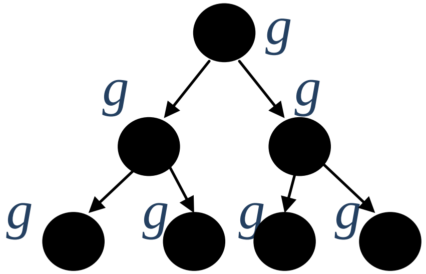
$M, s_0 \models \mathbf{EF}\ g$



$M, s_0 \models \mathbf{AF}\ g$



$M, s_0 \models \mathbf{EG}\ g$



$M, s_0 \models \mathbf{AG}\ g$

E⟨⟩ φ :

$W_{-1} := \varnothing$

$W_0 := [|\varphi|]$

$i := 0$

while $W_{i+1} \neq W_i \ \wedge S_0 \cap W_{i+1} = \varnothing$

    do

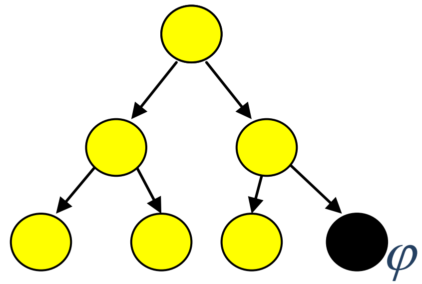
        $i := i + 1$

        $W_{i+1} :=$ pre$(W_i) \cup W_i$

    od

if $S_0 \cap W_{i+1} \neq \varnothing$ then write ‘Formula **E**⟨⟩ φ is valid’

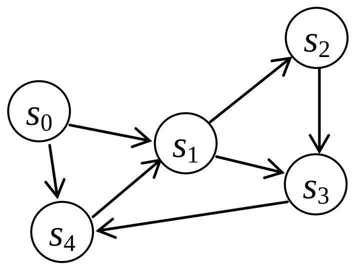
else write ‘Formula **E**⟨⟩ φ is invalid’



$M, s_0 \models$ **E**⟨⟩ φ

Näide:

pre$(\{s_1, s_3\}) = \{s_0, s_4, s_1, s_2\}$



$\mathbf{A}\langle\rangle\, \varphi$:

$W_{-1} := \varnothing$

$W_0 := [|\varphi|]$

$i := 0$

while $W_{i+1} \neq W_i \;\wedge\; S_0 \not\subseteq W_{i+1}$

    do

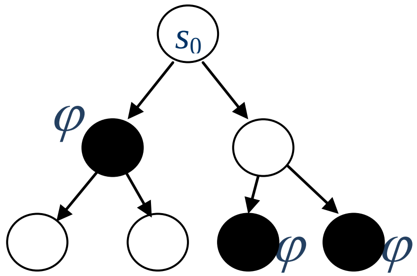
        $i := i + 1$

        $W_{i+1} :=$ wp$(W_i) \cup W_i$

    od

if $S_0 \subseteq W_{i+1}$ then write ‘Formula **A**<> φ is valid’

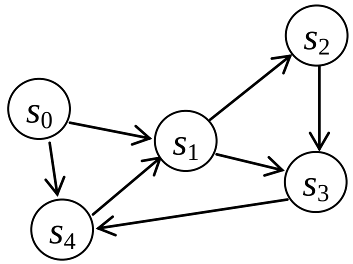
    else write ‘Formula **A**<> φ is invalid’



$\boxed{M, s_0 \models \mathbf{A}\!<\!>\, g}$

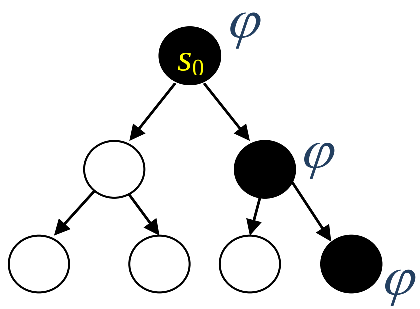
Näide:

wp$(\{s_1, s_3\}) = \{\, s_4, s_2\}$



E[] φ :

$W_{-1} := \varnothing$
$W_0 := \mathrm{U} \setminus [|\varphi|]$ % U – set of all states
$i := 0$
while $\overline{W}_{i+1} \neq \overline{W}_i$ % Fixed point not reached
do
$i := i + 1$
$\overline{W}_{i+1} := (\mathrm{pre}(\overline{W}_i) \cap [|\varphi|]) \cup \overline{W}_i$
od



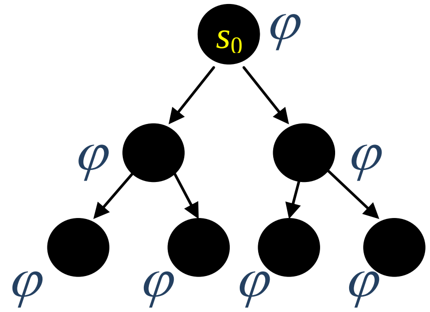
$M, s_0 \models$ **E[]** φ

if $S_0 \subseteq \overline{W}^*$ then write 'Formula **E[]** φ is invalid'
else write 'Formula **E[]** φ is valid'

kus $\overline{W}^*$ on algoritmi püsipunkt

A[] φ :

$\overline{W}_{-1} := \varnothing$
$\overline{W}_0 := U \setminus [|\varphi|]$ % U – set of all states
$i := 0$
while $\overline{W}_{i+1} \neq \overline{W}_i$
do
$i := i + 1$
$\overline{W}_{i+1} := (wp(\overline{W}_i) \cap [|\varphi|]) \cup \overline{W}_i$
od
if $S_0 \cap \overline{W}^* \neq \varnothing$ then write 'Formula **A[]** φ is invalid'
else write 'Formula **A[]** φ is valid'



$M, s_0 \models$ **A[]** φ