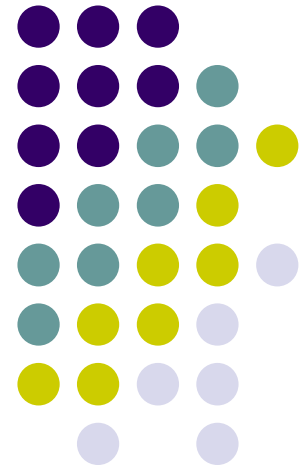


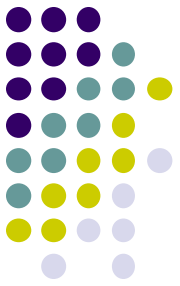
Loeng 3: Loogilise programmeerimise alused



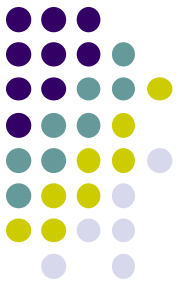
J.Vain



Loengu kava



- Loogika valemid Horni lause kujul
 - Fakt
 - Reegel
 - Päring
- Horni lausete tõestmine resolutsiooni meetodiga
- Termide unifitseerimine kui resolutsiooni eeldus
- Näided
- Takeaway
 - Teadmised Prologi tõestussmehhanismist



Horni lause

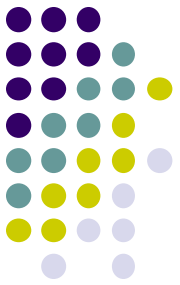
- *Loogiline programm* koosneb *Horni lausetest*
- Horni lause üldkujul:

$$p \leftarrow q_1, \dots, q_n,$$

kus

p – Horni *lause päis*

q_1, \dots, q_n – Horni *lause keha*



Horni lause

- Horni lause $p \leftarrow q_1, \dots, q_n$ esituskujud:

- *implikatiivne* kuju:

$$p \leftarrow q_1 \wedge \dots \wedge q_n$$

- kus p ja q_1, \dots, q_n tähistavad *literaale*

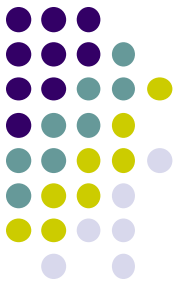
- *disjunktiivne* kuju (sisaldab ≤ 1 positiivse literaali):

$$p \vee \neg q_1 \vee \dots \vee \neg q_n$$

- Implikatiivne ja disjunktiivne kuju on *semantiliselt ekvivalentsed*

- *Literaali* – atomaarne valem või selle eitus

- *Atomaarne valem*: $P(t_1, \dots, t_n)$, kus P – predikaadi sümbol
 t_1, \dots, t_n – termid



Kuidas mõista Horni lauset $p \leftarrow q_1, \dots, q_n$?

- Operatsiooniline semantika:

"Programmi p täitmiseks tuleb täita alamprogrammid q_1, \dots, q_n "

- Deklaratiivne semantika:

"Lause p tõesus järeldub lausete q_1, \dots, q_n tõesusest" ehk

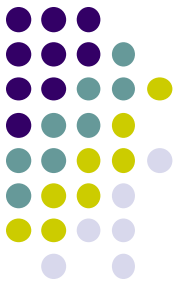
"Lause p kehtib siis, kui kehtivad laused q_1, \dots, q_n "

- Muutujate (vaikimisi) tõlgendamine reeglis:

$p(x_1, \dots, x_n) :- q_1(y_1, \dots, y_m), \dots, q_n(z_1, \dots, z_l)$ (Prolog)

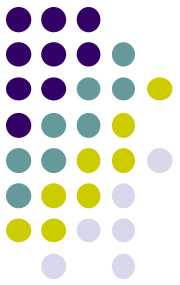
$\forall x_1 \dots x_n \exists y_1 \dots y_m z_1 \dots z_l : P(x_1 \dots x_n) \leftarrow Q_1(y_1 \dots y_m) \wedge \dots \wedge Q_n(z_1 \dots z_l)$ (PA)

kõik muutujad Horni lauses on kvantoritega seotud



Horni lause tüübid

- *Päring* – Horni lause, millel on ainult keha (disjunktiivse kuju puhul vähemalt ühest negatiivsest literaalist koosnev disjunktsioon).
- Prologi päring käivitab lahendi otsingu
Näide: $?- \text{isa}(\text{juku}, X)$.



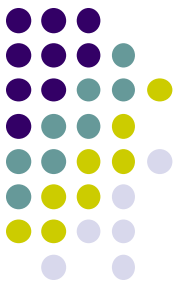
Suletud maailma eeldus

Suletud maailma eeldus:

Tõene on ainult see väide, mille tõesuse saab loogiline programm tuletada teadmusbaasis olevatest faktidest.

- **NB!**

- Faktide puudumine teadmusbaasist ei tähenda määramatust
- Fakti puudumine teadmusbaasist tähendab **fakti eitust!**

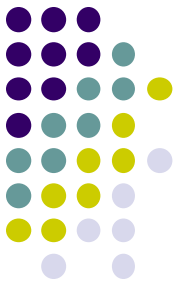


Resolutsioon

- *Resolutsioon* - Horni lausete kujul oleva deduktiivse süsteemi tõestusreegel.
- Kuidas mõista resolutsiooni?
 - Vastuväiteline tõestamine:

Olgu $D \leftarrow \Delta$ Horni lause, kus D on reegli päis ja Δ on reegli keha.

Valem $D \leftarrow \Delta$ kehtib parajasti siis, kui tema eituse $\neg(D \leftarrow \Delta)$ on väär.
 - Horni lause tõestamiseks tõestatakse, et valemist $\neg(D \leftarrow \Delta)$ saab tuletada **vastuolu**.
 - Vastuolu Prologi mõttes tähendab, et teadmusbasis ei leidu niisugusi fakte, millest saaks tuletada tõestatava väite.
 - *resolutsiooni reegel* (RR) võimaldab tuletada tõestatava valemi eitusest **tühja valemi** kasutades vahe-eelduste „väljalõikamist“

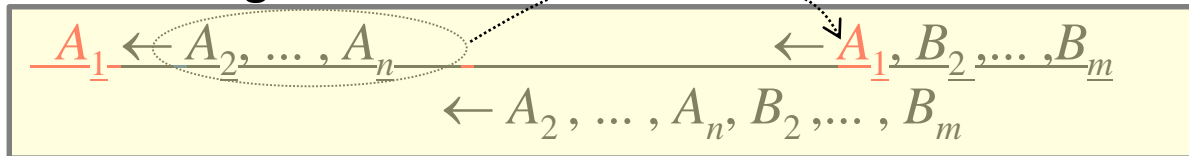


Resolutsiooni reegel

Olgu Horni lause (HL) implikatsiooni kujul

- HL päring: $\leftarrow A_1, B_2, \dots, B_m$, milles esineb literaal A_1
- HL reegel: $A_1 \leftarrow A_2, \dots, A_n$, kus literaal A_1 on järeluses,

siis resolutsiooni reeglit

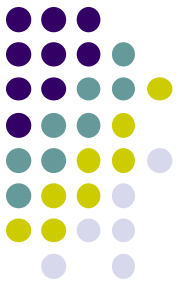


rakendades asendame päringus literaali A_1 reegli $A_1 \leftarrow A_2, \dots, A_n$ põhjal eeldustega A_2, \dots, A_n .

Tulemusena omandab algne päring $\leftarrow A_1, B_2, \dots, B_m$ kuju:

$$\leftarrow A_2, \dots, A_n, B_2, \dots, B_m$$

Kui päringu kõigi literaalide asendamisel on jõutud faktideni, siis neil puuduvad eelduslaused ja faktide asendamine annab tühja literaali.

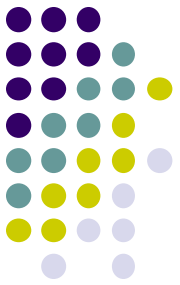


Resolutsiooni reegel

Resolutsiooni reegel disjunktsiooni kujul olevate Horni lausetega

$$\frac{\neg A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \quad A_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m}{A_2 \vee \dots \vee A_n \vee B_2 \vee \dots \vee B_m} \quad (\text{RR})$$

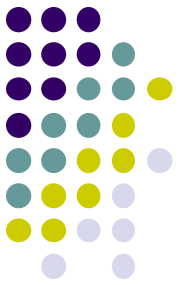
sest $\neg A_1 \vee A_1 \Leftrightarrow \text{true}$ ja $\text{true} \vee A \Leftrightarrow A$



Faktoriseerimisreegel (abireegel)

- Kui päringus on kaks ühesugust literaali, võib neist ühe eemaldada ilma valemi tõeväärtust muutmata.

$$\frac{\leftarrow A_1, A_1, A_2, \dots, A_n}{\leftarrow A_1, A_2, \dots, A_n}$$



Resolutsiooni rakendamine

Näide:

Olgu antud Horni laused disjunktsiooni kujul:

1. `isa(jaan, martin)`
2. `¬isa(riivo, veiko)`
3. `isa(martin, veiko) ∨ isa(riivo, veiko)`
4. `¬ isa(martin, veiko) ∨ vanaisa(jaan,veiko)`

Kas lausetest 1) - 4) saab tuletada lause `vanaisa(jaan,veiko)`?

st kas laused 1) – 4) koos negatiivse literaaliga

5. `¬ vanaisa(jaan,veiko)`

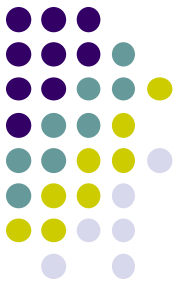
on vastuoluline ehk kas neist saab tuletada tühja disjunkti?

2 ja 3 $\xrightarrow{\text{resolutsioon}}$ 6. `isa(martin, veiko)`

4 ja 6 $\xrightarrow{\text{resolutsioon}}$ 7. `vanaisa(jaan,veiko)`

7 ja 5 $\xrightarrow{\text{resolutsioon}}$ tühi disjunkti

Resolutsioon muutujaid sisaldavate Horni lausetega



Näide

Olgu lausete hulk Γ :

isa(jaan, peeter).

isa(jaan, martin).

isa(martin, veiko).

isa(riivo, leo).

ema(leena, leo) \vee isa(leena, leo).

\neg isa(leena, leo).

\neg isa(X, Y) \vee \neg isa(Y, Z) \vee vanaisa(X, Z).

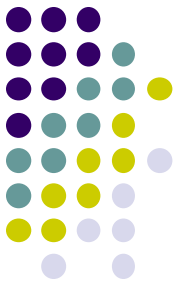
\neg isa(X, Y) \vee \neg ema(Y, Z) \vee vanaisa(X, Z).

ja valem **A**, mida tahame tõestada hulgal Γ , on

A: vanaisa(jaan, veiko)

Seega näitame, et kehtib $\Gamma \rightarrow \mathbf{A}$:

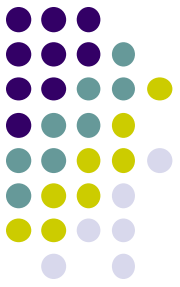
Resolutsioon muutujaid sisaldavate Horni lausetega



- Eelnevast teame, et kehtib samasus $\Gamma \rightarrow A \equiv \neg \Gamma \vee A$,
- seega valem $\Gamma \rightarrow A$ kehtib parajasti siis, kui tema eitus $\neg(\Gamma \rightarrow A) \equiv \equiv \neg(\neg \Gamma \vee A) \equiv \Gamma \wedge \neg A$ on vasturääkiv.
- Vasturääkivuse näitamiseks laiendame hulka Γ lisades sellele valemi $\neg A$, saame lausete hulga $\Gamma' = \Gamma \cup \neg A$:
Näite puhul: $\Gamma' = \Gamma \cup \neg$ vanaisa(jaan, veiko)
- Tuletame resolutsiooni kasutades Γ' -st vastuolu e. tühja disjunkti.

- Kuidas aga rakendada resolutsiooni *muutujaid sisaldavate* Horni lausete puhul?

Resolutsioon muutujaid sisaldavate Horni lausetega



- Muutujat V sisaldav lause tähistab *kõigi* lausete hulka, milles V on asendatud konkretiseeriva termiga.

Näide (muutujate X, Y, Z konkretiseerimine):

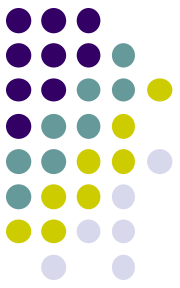
Lause $\neg \text{isa}(X, Y) \vee \neg \text{isa}(Y, Z) \vee \text{vanaisa}(X, Z)$.

konkretiseeringud on:

1) $\neg \text{isa}(\text{leo}, \text{jaan}) \vee \neg \text{isa}(\text{jaan}, \text{martin}) \vee \text{vanaisa}(\text{leo}, \text{martin})$.

2) $\neg \text{isa}(\text{leo}, \text{peeter}) \vee \neg \text{isa}(\text{peeter}, \text{martin}) \vee \text{vanaisa}(\text{leo}, \text{martin})$.

Resolutsioon muutujaid sisaldavate Horni lausetega

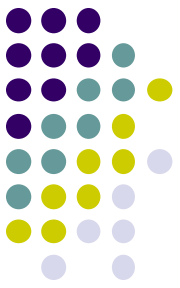


- Kuidas leida konkretiseering, mida kasutades saab rakendada resolutsiooni?
- Olgu reeglis

$$\frac{\neg \underline{A_1} \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \quad \underline{A'_1} \vee B_2 \vee \dots \vee B_m}{A_2 \vee \dots \vee A_n \vee B_2 \vee \dots \vee B_m}$$

- literaalid A_1 ja A_1' , mis erinevad ainult muutujate nimede poolest.
- Tuletame meelde muutujate interpretatsiooni reeglis:
 $\forall x_1 \dots x_n \exists y_1 \dots y_m z_1 \dots z_l : P(x_1 \dots x_n) \leftarrow Q_1(y_1 \dots y_m) \wedge \dots \wedge Q_n(z_1 \dots z_l)$
- Et rakendada resolutsiooni, peab muutujad literalides A_1 ja A_1' konkretiseerima nii, et literalid oleksid ühesugusel kujul ehk *unifitseeritud*.

Resolutsioon muutujaid sisaldavate Horni lausetega



Näide (järg - unifitseerimine):

Et rakendada resolutsioonireeglit lausetele 2 ja 7, kus

2. `isa(jaan, martin)`

7. $\neg \text{isa}(X, Y) \vee \neg \text{isa}(Y, Z) \vee \text{vanaisa}(X, Z)$,

tuleb nende literaalid unifitseerida. Unifitseerimine toimub *muutujate asendamise* teel termidega.

Muutujate asendus e. substitutsioon: $\{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$, kus

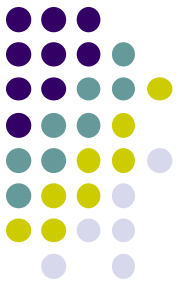
x_i – asendatav muutuja

t_i – asendav term, kus t_i on erinev x_i –st

Selgitus: Näites kasutame asendust $\{X/\text{jaan}, Y/\text{martin}\}$

2. on juba konkreetne, sest konstante ei saa asendada,

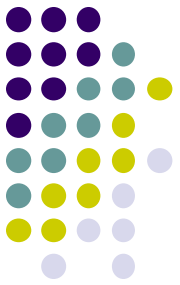
$7 \xrightarrow{\text{unifitseerimine}} 7'$: $\neg \text{isa}(\text{jaan}, \text{martin}) \vee \neg \text{isa}(\text{martin}, Z) \vee \text{vanaisa}(\text{jaan}, Z)$.



Termide unifitseerimine

Definitsioon (Termide unifitseeruvus):

Terimid t_1 ja t_2 on unifitseeruvad, kui leidub asendus σ , nii et $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$



Termide unifitseerimine

Näide (järg): kasutame unifitseerijat (asenduste hulka) $\{X/\text{jaan}, Y/\text{martin}\}$

Peale X ja Y unifitseerimist ja RR reegli rakendamist, saame

7". $\neg \text{isa}(\text{martin}, Z) \vee \text{vanaisa}(\text{jaan}, Z)$.

Unifitseerime 3 ja 7":

3. $\text{isa}(\text{martin}, \text{veiko})$.

7". $\neg \text{isa}(\text{martin}, Z) \vee \text{vanaisa}(\text{jaan}, Z)$.

Unifitseerija $\{Z/\text{veiko}\}$ annab

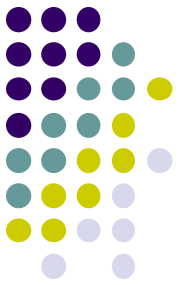
7"". $\neg \text{isa}(\text{martin}, \text{veiko}) \vee \text{vanaisa}(\text{jaan}, \text{veiko})$

ning RR reegli abil tuletame väidetest 3. ja 7"".

9. $\neg \text{vanaisa}(\text{jaan}, \text{veiko})$

10. $\text{vanaisa}(\text{jaan}, \text{veiko})$

9. ja 10. annavad RR põhjal tühja disjunkti e. vastuolu.



Termide unifitseerimine

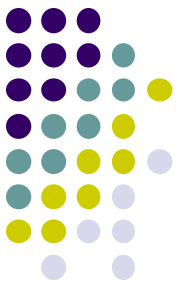
- Kuidas unifitseerida, kui unifitseeritavad termid sisaldavad muutujaid?

Minimaalse substituutsiooni reegel:

Asendatakse ainult need muutujad, mille asendamine võimaldab rakendada resolutsiooni reeglit.

Näide:

Unifitseerime	$P(a, X, Y) \vee S(X, Y)$	ja	$\neg P(U, V, b) \vee R(U, V)$
kasutades asendust	$\{U/a, Y/b, X/V\}$.		
saame	$P(a, V, b) \vee S(V, b)$	ja	$\neg P(a, V, b) \vee R(a, V)$
RR rakendamine annab	$S(V, b) \vee R(a, V)$		



Kõige üldisem unifitseerija - mgu

NB! Asendused tehakse asendajatega vasakult paremale järjestuses ja asendus tehakse teadmusbasi kõikides Horni lausetes.

Definitsioon (Kõige üldisem unifitseerija - mgu):

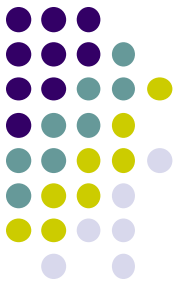
Termide t_1 ja t_2 kõige üldisem unifitseerija on asendus ρ , mis rahuldab tingimusi:

1. ρ on termide t_1 ja t_2 unifitseerija
2. t_1 ja t_2 iga unifitseerija σ korral leidub veel asendus τ , nii et $\sigma = \tau \circ \rho$ st. iga termi t korral $\sigma(t) = \tau(\rho(t))$.

(\circ – tähistab unifitseerijate kompositsiooni)

Selgitus:

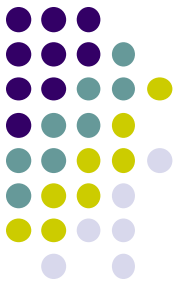
! mgu annab kõige vähem konkretiseeritud omavahel unifitseeruvad termid



Unifitseerimise näiteid

- $\text{mgu}(P(a,X), P(Y,b)) = \{Y/a, X/b\}$
- $\text{mgu}(P(X, f(X)), P(f(Y), U)) = \{X/f(Y), U/f(f(Y))\}$
- $\text{mgu}(L(g(X,X)), L(g(f(a), f(a)))) = \{X/f(a)\}$
- $\text{mgu}(R(a,b), R(a,b)) = \{\}$

Resolutsioon unifitseeritavatel literalidel

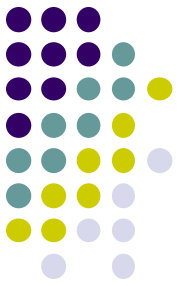


Unifitseerimisega resolutsiooni reegel:

$$\frac{\neg A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \quad B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m \quad \sigma = \text{mgu}(A_1, B_1)}{(A_2 \vee \dots \vee A_n \vee B_2 \vee \dots \vee B_m)\sigma}$$

Horni lausetes, millele rakendatakse resolutsiooni reeglit, tuleb eelnevalt unifitseerida mgu-ga kõik termid

Kõige üldisem unifitseerija - mgu

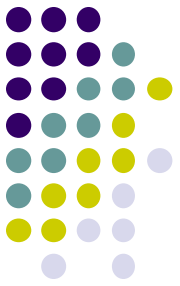


Lause:

Leidub algoritm mgu, mis arvutab literaalide ja termide x ja y kõige üldisema unifitseerija.

- Lause tõestuseks esitame järgnevalt mgu-algoritmi

Algoritm mgu leidmiseks (1)



```
substitution mgu(x,y)
term x, y;                                % Olgu x ja y unifitseeritavad termid
{ int i;
  Substitutions list g;                    % Asendused salvestame listi g

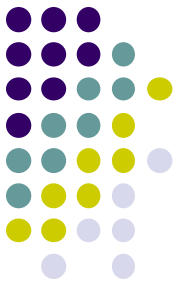
% Case1: termideks on muutujad, konstandid või termid on erineva pikkusega

if x==y return EMPTYSUBST;                % kui X ja Y on ühesugused
else if variable(x) return mgu_var(x,y); % Kui x on muutuja
else if variable(y) return mgu_var(y,x); % Kui y on muutuja
else if (constant(x) || constant(y)) return NOSUBST;

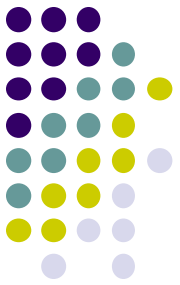
% Kui erinevad konstandid
% Kui aarsus erinev,
% siis ei ole unifitseeritavad

return NOSUBST;
```

Algoritm mgu leidmiseks (2)



```
% Case 2: ühepikkuste mitmekohaliste termide unifitseerimine
i=0;
g=EMPTYSUBST;
while (i<=length(x)) % iteratsioon alamtermide kaupa
{
    s= mgu(subterm(x,i), subterm(y,i)); % X ja Y i-nda alamtermi võrdlus
    if s==NOSUBST return s; % Kui puudub asendus
    else % Kui leidub asendus
        g=compose(g,s); % Täiendada unifitseerijat g asendusega s
        x=substitute(x,g); % Rakendada unifitseerijat g termile x
        y=substitute(y,g); % Rakendada unifitseerijat g termile y
    i= i+1;
}
return g;
}
```

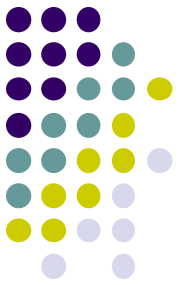


Case 3: Muutujate asendatavuse kontroll

```
substitution mgu var(x,y)  
term x,y;  
{  
    if occurs_in(x,y) return NOSUBST;  
        % Muutuja ei tohi esineda temaga  
        % unifitseeritavas termis, sest siis  
        % tekib "ringasendus"  
else return makesubstitution(x,y);  
}
```

Näide:

$\text{mgu}(\text{P}(a,X,X), \text{P}(Y,b,Y))$ - siin ei eksisteeri unifitseerivat asendust



Unifitseerimise harjutusi

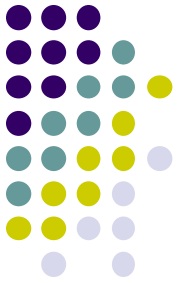
Missugused alltoodud asendustest on lubatud?

- $\{x/y, y/x\}$
- $\{x/x, y/x\}$
- $\{x/y, x/z\}$
- $\{x/f(x,y), y/g(z)\}$
- $\{x/a, y/x\}$
- $\{z/a, b/c\}$

Rakendada asendust $\{x/h(y, a), y/b, z/g(c)\}$ järgmistele termidele

- $f(x,y,z)$
- $f(a,b,c)$
- $h(x,x)$
- $f(g(h(x),v), g(x,y), g(z, f(x,y,u)))$

Unifitseerimise harjutusi



Leida mgu termidele:

$$\text{mgu}(p(f(y), w, g(z)), p(z, h(z, w), f(v))) = ?$$

$$\text{mgu}(p(a, x, f(g(y))), p(u, u, v)) = ?$$